問題3

入力信号を $A=\{0,1\}$，出力信号を $B=\{0,1\}$ とする二元対称通信路 Γ を考える．A の確率分布を P_A，A に属する事象 a が発生する確率を $P_A(a)$ と表す．通信路 Γ において $P_A(0)=p$，$P_A(1)=1-p$ であり，どちらの値を入力した場合にも q の確率で信号が反転する．このとき以下の問に答えよ．なお，本問において対数の底は2とする．

(1) 通信路 Γ の通信路線図を示せ．

(2) B の確率分布 P_B を p,q を用いて表わせ．

(3) エントロピー $H(B)$ および条件付きエントロピー $H(A|B)$ を p,q を用いて表わせ．

(4) $(p=0.25, q=0)$ ならびに $(p=0.25, q=0.25)$ のそれぞれの場合における $H(A|B)$ と相互情報量 $I(A;B)$ を求めよ．また，両方の場合における $I(A;B)$ の値を比較することで，この通信路において $I(A;B)$ の意味するところを述べよ．

次に，無記憶通信路 Γ_1 と無記憶通信路 Γ_2 をカスケード接続する場合を考える．すなわち，入力信号を $X=\{x_1,x_2\}$，出力信号を $Y=\{y_1,y_2\}$ とする通信路 Γ_1，ならびに入力信号を Y とし出力信号を $Z=\{z_1,z_2\}$ とする通信路 Γ_2 を考える．x と y が同時に発生する確率を $P(x,y)$，y が与えられた場合の x の条件付き確率を $P(x|y)$ と示す．以下の問に答えよ．

(5) この通信路 Γ_1，Γ_2 において次の式 (i) が成り立つことを示せ．

$$H(X|Z)-H(X|Y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left[P(y_i,z_j)\sum_{k=1}^{2}P(x_k|y_i)\left\{\log P(x_k|y_i)-\log P(x_k|z_j)\right\}\right] \qquad \text{(i)}$$

(6) $H(X|Z)\geq H(X|Y)$ が成り立つことを示せ．また，これに基づき相互情報量 $I(X;Z)$ の意味するところを述べよ．

(7) X の確率分布を $P_X(x_1)=s$，$P_X(x_2)=1-s$ とし，Γ_1 と Γ_2 どちらの通信路も確率 r にて信号の反転が発生する場合を考える．通信路全体の通信路容量を C_{12} とすると，C_{12} が最大となる確率 r とそのときの C_{12} の値を求めよ．

Problem 3

Consider a symmetric binary channel Γ, where the input symbols are $A = \{0, 1\}$, and the output symbols are $B = \{0, 1\}$. We denote the probability distribution of A as P_A, and the probability of event a, which belongs to A, as $P_A(a)$. Suppose that $P_A(0) = p$, $P_A(1) = 1 - p$, and the probability of a symbol swap is q whichever symbol is inputted to channel Γ. Answer the following questions. In this problem, the base of logarithm is 2.

(1) Draw a channel diagram of channel Γ.

(2) Describe the probability distribution of B, P_B, using p and q.

(3) Describe the entropy $H(B)$ and the conditional entropy $H(A|B)$ using p and q.

(4) Calculate $H(A|B)$ and the mutual information $I(A; B)$ for each of the two cases. ($p = 0.25, q = 0$) and ($p = 0.25, q = 0.25$). Also, explain the meaning of $I(A; B)$ in this channel comparing the $I(A; B)$ values in the both cases.

Suppose that memoryless channels Γ_1 and Γ_2 are cascade-connected. In channel Γ_1, the input symbols are $X = \{x_1, x_2\}$ and the output symbols are $Y = \{y_1, y_2\}$. In channel Γ_2, the input symbols are Y and the output symbols are $Z = \{z_1, z_2\}$. We denote the simultaneous probability of x and y as $P(x, y)$, and the conditional probability of x given y as $P(x|y)$. Answer the following questions.

(5) Prove that Eq. (i) is true on channel Γ_1 and channel Γ_2.

$$H(X|Z) - H(X|Y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left[P(y_i, z_j)\sum_{k=1}^{2} P(x_k|y_i)\{\log P(x_k|y_i) - \log P(x_k|z_j)\}\right] \quad \text{(i).}$$

(6) Prove that $H(X|Z) \geq H(X|Y)$ is true. Based on this, explain the meaning of the mutual information $I(X; Z)$.

(7) Suppose that the probability distribution of X as $P_X(x_1) = s$ and $P_X(x_2) = 1 - s$, and the probability of a symbol swap is r on channel Γ_1 and channel Γ_2. The capacity in the entire channel is denoted as C_{12}. Obtain the values of r and C_{12} when C_{12} is maximized.