

問題C

金属中の自由電子は、フェルミ分布に従う自由電子フェルミ気体として取り扱うことができる。これについて以下の問に答えよ。ただし、プランク定数を h 、ボルツマン定数を k_B 、電子の質量を m 、円周率を π とする。

- (1) 温度を T 、フェルミ準位を μ としてフェルミ分布関数をエネルギー ε の関数 $f(\varepsilon)$ として表せ。さらに、以下の場合について $f(\varepsilon)$ の概形を描け。
 - (1-1) $T=0$ の場合
 - (1-2) $T>0$ だが電子気体は十分に低温で縮退している（フェルミ気体の特徴を失わない）場合
- (2) 金属を一辺の長さ L の立方体とし、 x, y, z 軸を辺と平行に取る。このとき、電子の波動関数の波数ベクトル $\mathbf{k}=(k_x, k_y, k_z)$ を x, y, z 軸方向の量子数 n_x, n_y, n_z を用いて表せ。
- (3) 電子のエネルギー ε を量子数 n_x, n_y, n_z を用いて表せ。
- (4) 問(2)で求めた \mathbf{k} 空間での離散的な点が電子の一つの状態を与える。 $k=|\mathbf{k}|$ と $k+\Delta k$ (Δk は k の微小増分) の間の点の数を考えることにより、エネルギー ε における状態密度（単位体積当たりの状態数） $D_3(\varepsilon)$ が $\sqrt{\varepsilon}$ に比例することを示し、その係数を求めよ。ただし、電子はスピンをもつことに注意せよ。
- (5) 金属中の電子密度を N_3 とする。 $T=0$ におけるフェルミ準位 μ_0 を求めよ。
- (6) $T=0$ における電子の平均エネルギー $\bar{\varepsilon}_0$ を μ_0 を用いて表せ。
- (7) 金属が x, y 方向に広がる2次元の薄膜、もしくは x 方向に伸びる1次元の細線であったとする。このときのそれぞれの状態密度 $D_2(\varepsilon)$ （単位面積当たり）および $D_1(\varepsilon)$ （単位長さ当たり）を問(2)-(4)の3次元の場合と同様にして求めよ。
- (8) 2次元および1次元のそれぞれの場合について $T=0$ におけるフェルミ準位 μ_0 を求めよ。ただし2次元の電子密度を単位面積当たり N_2 、1次元の電子密度を単位長さ当たり N_1 とする。
- (9) 温度が $T>0$ に上昇したとき、フェルミ準位 μ は問(5)および問(8)で求めた μ_0 と比べてどう変化するか、3次元、2次元、1次元の場合について理由をつけて答えよ。ただし、自由電子は縮退しているものとせよ。

Problem C

Free electrons in a metal can be treated as the free electron Fermi gas that follows the Fermi distribution. Answer the following questions regarding this. Here, let h , k_B , m , and π be Planck's constant, Boltzmann's constant, the mass of free electrons, and the circular constant, respectively.

- (1) Express the Fermi distribution function $f(\varepsilon)$ as a function of the energy ε , when the temperature is T and the Fermi level is μ . In addition, sketch the graphs of the function $f(\varepsilon)$ at the following two temperatures,
 - (1-1) $T = 0$, and
 - (1-2) $T > 0$, where T is low enough that the electron gas is considered degenerate (still holds the features of the Fermi gas).
- (2) Assume that the metal is a cube of the edge length of L , and set the coordinate so that the x , y , and z axes are all parallel to the cube edges. Obtain the wavenumber vector $k = (k_x, k_y, k_z)$ of the wave function of an electron, using the quantum numbers n_x , n_y , and n_z for x , y , and z directions, respectively.
- (3) Derive the energy ε of an electron using the quantum numbers n_x , n_y , and n_z .
- (4) A discrete point in the k space in Question (2) corresponds to a state of an electron. By estimating the number of those points between $k = |k|$ and $k + \Delta k$ (Δk is the small increment of k), show that the density of states $D_3(\varepsilon)$ at the energy of ε (number of states per unit volume) is proportional to $\sqrt{\varepsilon}$, and derive its proportional constant. Note that electrons have spins.
- (5) Let N_3 be the density of electrons in the metal. Derive the Fermi level μ_0 at $T = 0$.
- (6) Express the averaged energy of an electron $\bar{\varepsilon}_0$ using μ_0 at $T = 0$.
- (7) We assume that the metal is a two-dimensional thin film on the x, y plane, or a one-dimensional thin wire along the x axis. Derive the respective densities of states $D_2(\varepsilon)$ (per unit area) and $D_1(\varepsilon)$ (per unit length) for the two cases, following the derivations for the three-dimensional case in Questions (2)-(4).
- (8) Derive the respective Fermi levels μ_0 at $T = 0$ for the two-dimensional and one-dimensional cases. Here N_2 denotes the density of electrons per unit area in the two-dimensional case, and N_1 denotes the density of electrons per unit length in the one-dimensional case.
- (9) When the temperature is raised to be $T > 0$, how does the Fermi level μ deviate from μ_0 derived in Questions (5) and (8)? Answer with reasons for the three-dimensional, two-dimensional and one-dimensional cases. Here we assume that the electron gas is degenerate.