

問題3

「賛成」あるいは「反対」の意見を雑音のある通信路を介して複数人から収集するアンケートシステムを設計したい。雑音のある通信路は、1分あたり「賛成」あるいは「反対」の一つの意見を伝送する二元対称通信路であり、誤り率は10%であるものとする。また、「賛成」と「反対」の意見の生起確率はそれぞれ95%、5%と想定してシステムを設計するものとする。なお、 $\log_2 3 = 1.58$, $\log_2 5 = 2.32$, $\log_2 95 = 6.57$ とし、相互情報量 I は式(i)で与えられるものとする。 $P(A_i)$ は記号 A_i の起こる確率、 $P(B_j | A_i)$ は記号 A_i が起こったときに記号 B_j が起こる条件付き確率である。

$$I = \sum_j P(B_j) \log_2 \left(\frac{1}{P(B_j)} \right) - \sum_i P(A_i) \sum_j P(B_j | A_i) \log_2 \left(\frac{1}{P(B_j | A_i)} \right) \quad (i)$$

- (1) 想定した生起確率を有する意見のエントロピーを求めよ。
- (2) 相互情報量と通信路容量の関係を説明せよ。
- (3) この二元対称通信路の通信路容量を求めよ。
- (4) ハフマン符号を適切に設計すれば、この通信路を用いて1分あたり二つの意見を同時に送信することができるか否かを理由を付けて示せ。
- (5) 適切な情報源符号化や通信路符号化を用いることで、この通信路を用いて誤りなく1分あたり一つの意見を送信することができるか否かを理由を付けて示せ。
- (6) 適切な情報源符号化や通信路符号化を用いることで、この通信路を用いて誤りなく意見を送信できる最大の送信レート(意見/分)を求めよ。

Problem 3

You need to design a questionnaire system to collect opinions of “agree” or “disagree” from many people through a noisy channel. The noisy channel is a binary symmetric channel capable of transmitting one opinion, either “agree” or “disagree”, once a minute, and the probability of error is 10%. For designing the system, you assume that the probability of being “agree” is 95%, and of being “disagree” is 5%. Use $\log_2 3 = 1.58$, $\log_2 5 = 2.32$, and $\log_2 95 = 6.57$. Mutual information I is given as Eq. (i), where $P(A_i)$ is the probability that we observe the symbol A_i , and $P(B_j | A_i)$ is the conditional probability that we observe the symbol B_j given that the symbol A_i has occurred.

$$I = \sum_j P(B_j) \log_2 \left(\frac{1}{P(B_j)} \right) - \sum_i P(A_i) \sum_j P(B_j | A_i) \log_2 \left(\frac{1}{P(B_j | A_i)} \right) \quad (i)$$

- (1) Show the entropy of the opinions that have the assumed occurrence probability.
- (2) Explain the relationship between the mutual information and the channel capacity.
- (3) Show the channel capacity of this binary symmetric channel.
- (4) Show whether it is possible, by designing an appropriate Huffman code, to transmit two opinions at a time per minute in this channel. Explain its reason.
- (5) Show whether it is possible, through an appropriate source coding and channel coding, to transmit one opinion per minute with no errors in this channel. Explain its reason.
- (6) Find the maximum transmission rate (opinions / minute) at which the system can transmit opinions with no errors in this channel assuming that you could find an appropriate source coding and channel coding.