問題3

エントロピーと通信路容量について以下の各問に答えよ.

表1は,A市とB市の天気の同時(結合)確率分布を示す.A市とB市の1日の天気は「晴」,「曇」,「雨」,「雪」のいずれかで表される. A市とB市の天気の間には,表1の通りの相関があるが,各市においては,ある日の天気と他の日の天気との相関はないものとする.

表 1

B市 \ A市	晴	曇	雨	雪
晴	1/8	1/16	1/32	1/32
曇	1/16	1/8	1/32	1/32
雨	1/16	1/16	1/16	1/16
雪	1/4	0	0	0

(1) A市とB市の100日間の天気のエントロピーをそれぞれ求めよ.

(2) A市とB市の100日間の天気の結合エントロピーを求めよ.

図1は,送信元Tから宛先Rへの通信路を表す. Tが一度に送信する符号は,0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7の8個の符号のいずれか一つである. Tが送信する符号がcである時,図1の通り,Rが受信する符号はその符号cか,符号$c+1$(modulo 8)のいずれかであり,それぞれの確率は1/2である.例えば,Tが符号3を送信する場合,Rが符号3を受信する確率と符号4を受信する確率は,それぞれ1/2であり,その他の符号を受信する確率は0である.

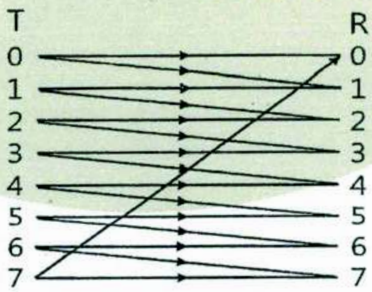

図 1

(3) この通信路の容量を求めよ.

(4) この通信路を用いて誤りの無い通信を行う手法を述べよ.

図 2 は，送信元 T'から宛先 R'への通信路を表す．T'が一度に送信する符号は，$0, 1, \cdots, k, \cdots, m-1$ の m 個の符号のいずれかである．T'が送信する符号が x である時，R'が符号 y を受信する確率 $p(y|x)$ は式(i)で与えられる．例えば，T'が符号 k を送信する場合，R'が受信する符号が k である確率は $(1-r)$ であり，R'が k 以外の符号を受信する確率は，それぞれ $r/(m-1)$ である．

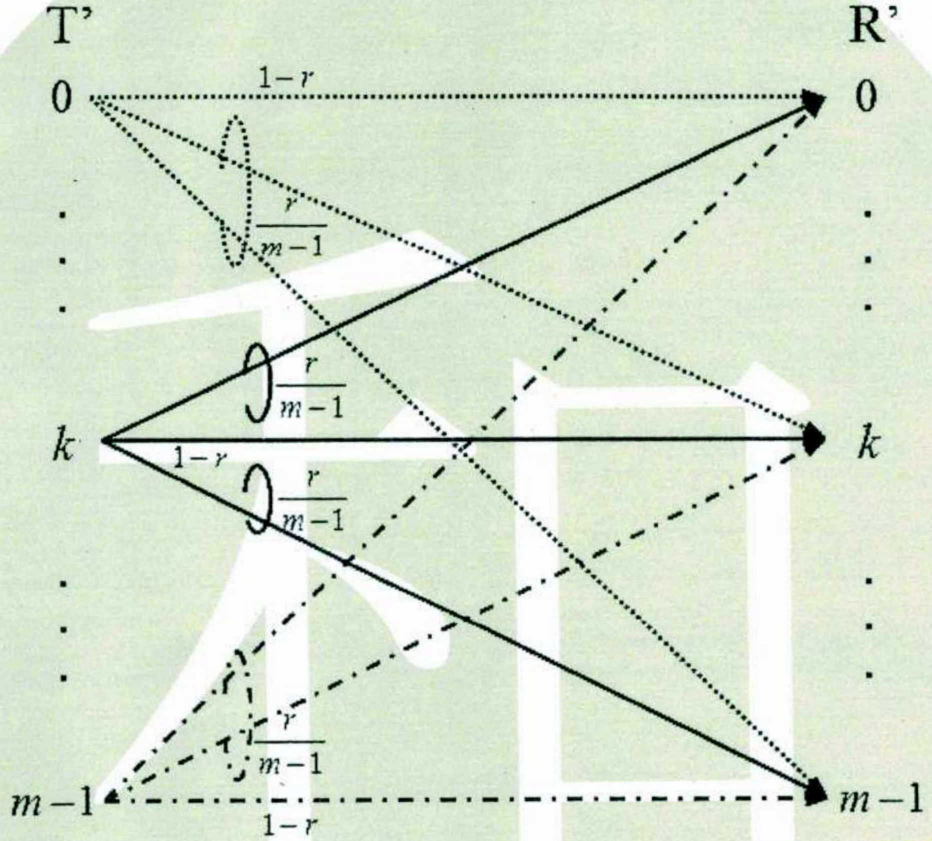

図 2

$$p(y|x) = \begin{cases} 1-r & x = y\text{の場合}, \\ \dfrac{r}{m-1} & x \neq y\text{の場合}. \end{cases} \qquad \text{(i)}$$

(5) この通信路の容量を m と r の式で表せ．

(6) $m = 5$ の場合，問(5)の通信路容量の概形を r の関数として描き，通信路容量の最大値とその時の r の値及び通信路容量の最小値とその時の r の値を示せ．必要であれば，次の値を使うこと．

$\log_2 3=1.59$, $\log_2 5=2.32$, $\log_2 7=2.81$, $\log_2 11=3.46$.

Problem 3

Answer the following questions regarding entropy and channel capacity.

Table 1 shows the joint probability distribution of the weather of city A and city B. The weather of the cities for a day is represented by one of "Sunny", "Cloudy", "Rainy", and "Snowy". There are some correlations between the weather of city A and that of city B as shown in Table 1. It is assumed that, for each city, there is no correlation between the weather of a day and that of any other day.

Table 1

City A / City B	Sunny	Cloudy	Rainy	Snowy
Sunny	1/8	1/16	1/32	1/32
Cloudy	1/16	1/8	1/32	1/32
Rainy	1/16	1/16	1/16	1/16
Snowy	1/4	0	0	0

(1) Calculate the entropy of weather for one hundred days of city A and that of city B, respectively.

(2) Calculate the joint entropy of weather for one hundred days of city A and city B.

Figure 1 shows a channel between a transmitter T and a receiver R. T transmits one of 8 codes of 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, and 7 at a time. For a code c transmitted by T, R receives the code c or code $c+1\,(\text{modulo}\,8)$, as shown in Fig. 1, and both of their probabilities are 1/2. For example, when T transmits code 3, the probability of R receiving code 3 and that of R receiving code 4 are both 1/2. The probability of R receiving any other codes is zero.

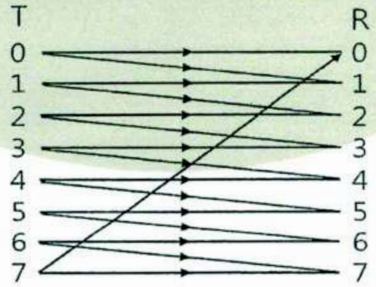

Fig. 1

(3) Calculate the capacity of this channel.

(4) Explain a method to achieve error-free communication over this channel.

Figure 2 shows a channel between a transmitter T' and a receiver R'. T' transmits one of m codes of $0, 1, \cdots, k, \cdots,$ and $m-1$ at a time. When the code transmitted by T' is x, the probability $p(y|x)$ of R' receiving code y is given by Eq. (i). For example, when T' transmits the code k, the probability of R' receiving the code k is $(1-r)$, and the probability of R' receiving any one of codes other than k is $r/(m-1)$.

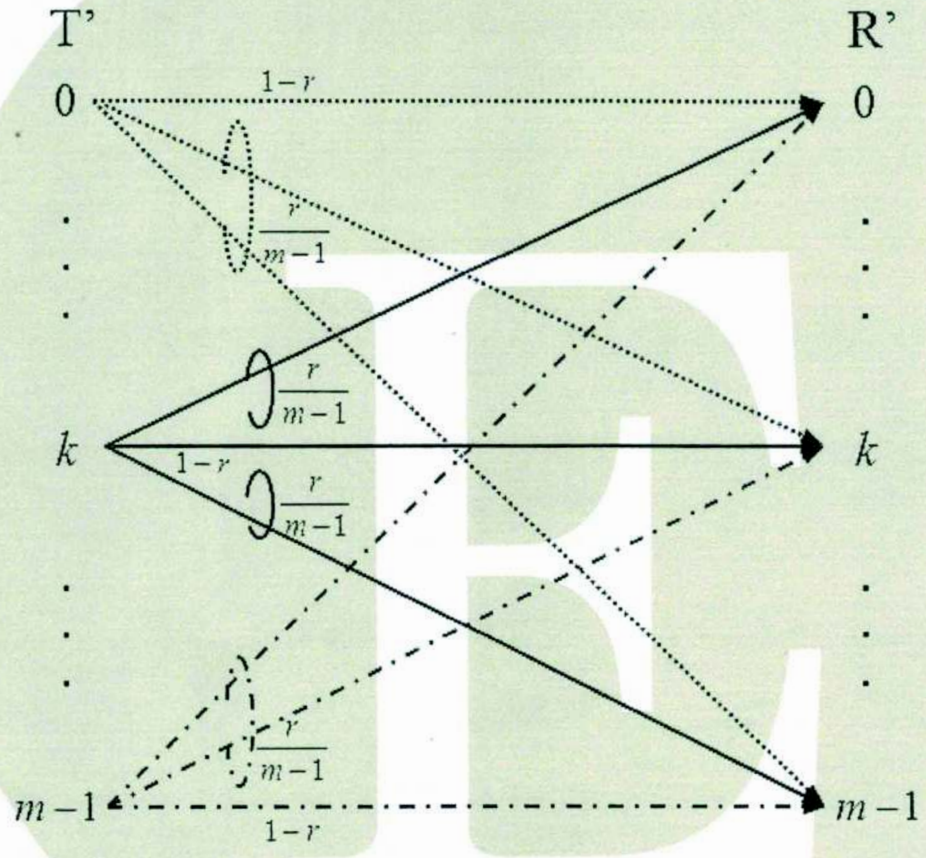

Fig. 2

$$p(y|x) = \begin{cases} 1-r & when\ x = y, \\ \dfrac{r}{m-1} & when\ x \neq y. \end{cases} \tag{i}$$

(5) Show the capacity of this channel as an expression using m and r.

(6) When $m = 5$, draw a sketch of a graph of the channel capacity in Question (5) as a function of r, indicating the values of the maximum channel capacity with its corresponding r and the minimum channel capacity with its corresponding r. Use values below if necessary.

$\log_2 3$=1.59, $\log_2 5$=2.32, $\log_2 7$=2.81, $\log_2 11$=3.46.