

第3問

手元に鍵がかかった箱が n 個、鍵が m 本 ($1 \leq m \leq n$)ある。鍵はすべてよく似た外観でタグなどもついておらず、どの鍵がどの箱を解錠できるかは試してみないとわからない。このとき、以下の各問に答えよ。

- (1) どの鍵もそれぞれひとつの箱を解錠できるが、それ以外の箱は解錠できず、どの箱も1本の鍵でしか解錠できない場合を考える。この場合、 $m \neq n$ ならば、どの鍵でも解錠できない箱があることになる。このとき、ランダムに選んだ鍵でランダムに選んだ箱を解錠できるか否かを試すことを考える。選んだ鍵で選んだ箱を解錠できる確率を求めよ。
- (2) 問(1)に述べた解錠の試行を初めて行うときに、鍵と箱との対応について得られる平均情報量(エントロピー)を求めよ。
- (3) どの鍵もいずれかひとつまたはふたつの箱を解錠でき、複数の鍵で解錠できる箱はないが、すべての箱はいずれかの鍵で解錠できる場合を考える ($n \leq 2m$)。このとき、ランダムに選んだ鍵でランダムに選んだ箱を解錠できるか否かを試すことを考える。選んだ鍵で選んだ箱を解錠できる確率を求めよ。
- (4) 問(3)に述べた解錠の試行を初めて行うときに、鍵と箱との対応について得られる平均情報量を求めよ。
- (5) 問(4)に述べた最初の試行により解錠できるか否かを知った上で、選んだ鍵がふたつの箱を解錠できる鍵である事後確率を考える。解錠できた場合の事後確率 p 、解錠できなかった場合の事後確率 q をそれぞれ求めよ。
- (6) 問(4)に述べた最初の試行によって選んだ鍵がふたつの箱を解錠できる鍵か否かについて得られる平均情報量を求めよ。問(5)の p および q を既知の値として用いてもよい。