第6問

ネットワークにおいて，最短経路と最短距離を求めるアルゴリズムを考える．図 1 はネットワークの一例である．図において，○印はノードを表し，ノードとノードを結ぶ直線はリンクを表す．リンクに付与された整数は隣接ノード間の距離を表す．

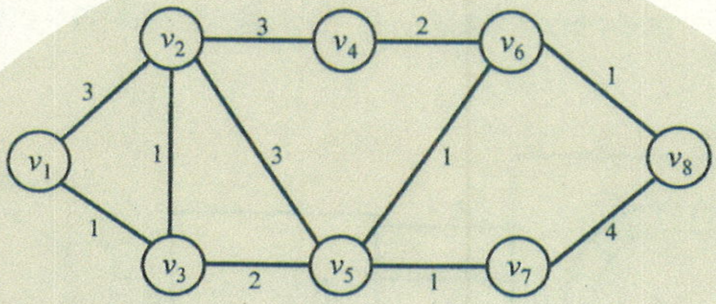

図 1

(1) 図 1 でノード v_1 を起点とした場合，ノード v_8 に至るまでの最短経路と最短距離を示せ．

(2) ノードの集合を $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，隣接するノード v_i と v_j の間の距離を c_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$，$c_{ij} = c_{ji}$，$c_{ij} \geqq 0$，$c_{ii} = 0$，ノード v_1 から v_j への距離を a_j とする．a_j が最短距離であることが確定したノードの集合を P，P に含まれないノードの集合を U とする．ノード v_1 から全てのノードに対する最短距離を求めるアルゴリズムを以下に示す．この場合の，手順(ii), (iii)の空欄(I)，(II)を埋めよ．

手順(i)：　$P = \{v_1\}$，$U = V - P$，$i = 1$，$a_1 = 0$，$a_j = \infty$ $(j{=}2, \ldots, n)$ とする．

手順(ii)：ノード v_i とその全ての隣接ノード v_j について，

[　　　　　(I)　　　　　] の場合，$a_j = a_i + c_{ij}$ とする．

手順(iii)：[　　(II)　　] を満たす v_k を，集合 U から除き，集合 P に加える．

手順(iv)：$U = \varnothing$ ならば終了，そうでなければ k の値を i に代入し，手順(ii)に戻る．

(3) 図 1 のネットワークに対して(2)の手順を適用し，手順(iv) にて $i = 5$ となった時点の集合 P, U と $a_j (j{=}1, 2, \ldots, 8)$ の値を示せ．また，手順が全て終了した時点の $a_j (j{=}1, 2, \ldots, 8)$ を示せ．

(4) (2)の手順を改良し，最短距離だけではなく最短経路も導出できるようにしたい．改良方法を具体的に述べよ．

(5) (2)の手順によって導出した $a_j (j{=}2, \ldots, n)$ は，ノード v_1 からノード $v_j (j{=}2, \ldots, n)$ への最短距離になっていることを証明せよ．